LISBOA SCHOOL OF ECONOMICS & MANAGEMENT

ISEG SINCE 1911

MAEG

Probabilidades – Teste intercalar Abril 2018

Nome:____ **Número:**__________

Cotação: (Espaço reservado para classificações)

1. (10) **2. (15)** **3.a (15)** **3.b (15)** **4.a (15)** **4.b (10)** **4.c (10)** **5. (10)**

Nota: todas as questões devem ser devidamente formalizadas e justificadas.

1. A Marta tem 4 meios de transporte alternativos para ir de determinada origem para o seu destino: O autocarro que utiliza em 40% das vezes, o metro que utiliza em 30%, a bicicleta (20% das vezes) ou ir a pé. A probabilidade de chegar atrasada é de 0.1 quando utiliza o metro, 0.2 quando recorre ao autocarro e de 0.05 quando vai de bicicleta ou a pé. Tendo a Marta chegado atrasada ao destino, qual a probabilidade de ter vindo de autocarro.

2. Seja X uma variável aleatória com função densidade dada por $f_X(x) = \begin{cases} x/2 & 0 < x < 1 \\ 0.75 & 1 < x < 2 \\ 0 & \text{outros } x \end{cases}$

   Obtenha a função de distribuição de X, calcule $P(X > 1.5 \mid X > 0.4)$ e calcule também a média da variável aleatória X.

3. Seja (X,Y) uma variável aleatória bidimensional discreta com a seguinte função de probabilidade:

x\y	0	1	2	3
0	0.05	0.05	0.10	0.10
1	0.02	0.03	0.05	0.10
2	0.08	0.12	0.15	0.15

   a. Calcule $P(Y > 0)$, $P(Y > 0 \mid X = 0)$ e $P(Y > 1 \mid X \le 1)$

   b. Calcule $E(XY)$, $E(X)$ e $E(Y)$. Será que este resultado lhe permite concluir sobre a eventual independência entre X e Y?

4. Seja (X,Y) uma variável aleatória bidimensional contínua com função de densidade dada por

   $$f(x,y) = \frac{3x}{16},\ 0 < y < 2,\ 0 < x < 2y.$$

   a. Obtenha as funções densidade marginais de X e de Y e calcule $P(X > Y)$.

   b. Obtenha $f_{Y|X}(y \mid 1)$ e calcule $P(Y > 1 \mid X = 1)$.

   c. Seja $U = 2Y - X$ e $V = Y$. Obtenha a função densidade conjunta do par (U,V).

5. Seja F_X a função de distribuição da variável aleatória X. Será a função $F_Y(y) = 1 - \left(1 - F_X(y)\right)^r$ com r inteiro positivo uma função de distribuição? Caso sim, prove-o, caso não explique porquê.

Soluções

1. Sejam os acontecimentos: A – “Autocarro”, M – “Metro”, B – “Bicicleta” e P – “Pé”
   Defina-se também o acontecimento At – “chegar atrasada”.
   Do teorema da probabilidade total sabe-se que
   $$P(At) = P(At\,|\,A)\times P(A) + P(At\,|\,M)\times P(M) + P(At\,|\,B)\times P(B) + P(At\,|\,P)\times P(P)$$
   $$= 0.2\times 0.4 + 0.1\times 0.3 + 0.05\times 0.2 + 0.05\times(1-(0.4+0.3+0.2))$$
   $$= 0.08 + 0.03 + 0.01 + 0.005 = 0.125$$
   Donde, pela fórmula de Bayes,
   $$P(A\,|\,At) = \frac{P(At\,|\,A)\times P(A)}{P(At)} = \frac{0.2\times 0.4}{0.125} = \frac{16}{25} = 0.64$$

2. Para a função de distribuição vem
   $$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x<0 \\ \int_0^x (u/2)\,du & 0\le x<1 \\ \int_0^1 (u/2)\,du + \int_1^x 0.75\,du & 1\le x<2 \\ 1 & x\ge 2 \end{cases} = \begin{cases} 0 & x<0 \\ 0.25x^2 & 0\le x<1 \\ 0.25+0.75(x-1) & 1\le x<2 \\ 1 & x\ge 2 \end{cases}$$
   $$= \begin{cases} 0 & x<0 \\ 0.25x^2 & 0\le x<1 \\ 0.75x-0.5 & 1\le x<2 \\ 1 & x\ge 2 \end{cases}$$
   $$P(X>1.5\,|\,X>0.4) = \frac{P(X>1.5)}{P(X>0.4)} = \frac{1-(0.75\times 1.5-0.5)}{1-0.04} = \frac{0.375}{0.96} = 0.3906$$
   $$E(X) = \int_0^1 \frac{x^2}{2}\,dx + \int_1^2 \frac{3x}{4}\,dx = \left(\frac{x^3}{6}\right]_0^1 + \left(\frac{3x^2}{8}\right]_1^2 = \frac{1}{6} + \left(\frac{12}{8} - \frac{3}{8}\right) = \frac{31}{24}$$

3. .
   a. $P(Y>0) = 1-P(Y=0) = 1-0.15 = 0.85$;
   $$P(Y>0\,|\,X=0) = \frac{f(0,1)+f(0,2)+f(0,3)}{f(0,0)+f(0,1)+f(0,2)+f(0,3)} = \frac{0.25}{0.30} = \frac{5}{6};$$
   $$P(Y>1\,|\,X\le 1) = \frac{P(X\le 1, Y>1)}{P(X\le 1)} = \frac{P(X\le 1, Y>1)}{P(X\le 1)} = \frac{f(0,2)+f(0,3)+f(1,2)+f(1,3)}{1-(0.08+0.12+0.15+0.15)} = \frac{0.35}{0.50} = 0.7$$

   b. .
   $$E(X\,Y) = 1\times 0.03 + 2\times 0.12 + 2\times 0.05 + 4\times 0.15 + 3\times 0.1 + 6\times 0.15$$
   $$= 0.03 + 0.24 + 0.10 + 0.60 + 0.30 + 0.9 = 2.17$$
   $E(X) = 1\times 0.2 + 2\times 0.5 = 1.2$; $E(Y) = 1\times 0.2 + 2\times 0.3 + 3\times 0.35 = 1.85$
   Como $E(XY) \neq E(X)\times E(Y)$ pode-se concluir que as v.a. não são independentes.

4. $f(x,y) = \frac{3x}{16}$, $0<y<2$, $0<x<2y$.

   a. $$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx = \int_0^{2y} \frac{3x}{16}\,dx = \left(\frac{3x^2}{32}\right]_0^{2y} = \frac{12y^2}{32} = \frac{3y^2}{8} \quad 0<y<2$$
   Para a marginal de X temos de utilizar a descrição alternativa do suporte

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy=\int_{x/2}^{2}\frac{3x}{16}dy=\frac{3x}{16}\left(2-\frac{x}{2}\right)=\frac{12x-3x^2}{32}\quad 0<x<4$$

$$P(X>Y)=\int_0^2\int_y^{2y}\frac{3x}{16}dx\,dy=\int_0^2\frac{3}{16}\left(\frac{x^2}{2}\right]_y^{2y}dy=\int_0^2\frac{9y^2}{32}dy=\frac{9}{32}\left(\frac{y^3}{3}\right]_0^2=\frac{24}{32}=\frac{3}{4}$$

b. $f_{Y|X}(y\,|\,1)=\dfrac{f(1,y)}{f_X(1)}=\dfrac{3/16}{9/32}=\dfrac{2}{3}$, $1/2<y<2$ $\;P(Y>1.5\,|\,X=1)=\int_{1.5}^{2}\dfrac{2}{3}dy=\left(\dfrac{2y}{3}\right]_{1.5}^{2}=\dfrac{1}{3}$

c. Seja então $\begin{cases}U=2Y-X\\V=Y\end{cases}$. Resolvendo vem $\begin{cases}X=-U+2V\\Y=V\end{cases}$ e portanto $J=\begin{vmatrix}-1 & 2\\0 & 1\end{vmatrix}=-1$.

$$f_{U,V}(u,v)=\frac{3(2v-u)}{16},\; 0<v<2,\; 0<2v-u<2v\Leftrightarrow 0<u<2v$$

5. Para ser função de distribuição tem de verificar 3 condições: não decrescente em $\mathbb{R}$; $F(-\infty)=0$ e $F(+\infty)=1$; Continuidade à direita $F(a^+)=F(a)$.

Como F_X é função de distribuição verifica estas condições sendo necessário confirmar que F_Y também as verifica.

$F_Y(y+\Delta y)=1-\left(1-F_X(y+\Delta y)\right)^r$ considerando $\Delta y>0$

$\geq 1-\left(1-F_X(y)\right)^r$ já que $F_X(y+\Delta y)\geq F_X(y)$ logo $1-F_X(y+\Delta y)\leq 1-F_X(y)$ e a elevação a uma potência positiva não altera a desigualdade

$=F_Y(y)$

$$F_Y(-\infty)=1-\left(1-F_X(-\infty)\right)^r=1-(1-0)^r=0$$

$$F_Y(+\infty)=1-\left(1-F_X(+\infty)\right)^r=1-(1-1)^r=1$$

$$F_Y(a^+)=1-\left(1-F_X(a^+)\right)^r=1-\left(1-F_X(a)\right)^r=F_Y(a)$$